

7.2 Matrices par blocs

On peut considérer les matrices comme simple tableau de nombres, mais il est parfois utile de faire apparaître certaines structures, comme par exemple les colonnes. On peut également partager les matrices en blocs et ainsi mettre en évidence des sous-matrices.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

Addition et multiplication par un scalaire

Si $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sont organisées en blocs de la même façon, on peut les additionner bloc par bloc.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & A_{13} + B_{13} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & A_{23} + B_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On multiplie de même, bloc par bloc, une matrice par un scalaire. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \lambda A_{13} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \lambda A_{23} \end{pmatrix}$$

Produit par blocs

On peut multiplier des matrices A et B par blocs en utilisant la règle habituelle ligne-colonne si le partage des colonnes de A correspond à celui des lignes de B :

Soient par exemple $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ des matrices par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix}$$

Alors le produit est donné par

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} B_{11} & A_{12} B_{21} & A_{13} B_{31} \\ A_{21} B_{11} & A_{22} B_{21} & A_{23} B_{31} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas particuliers Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Partition par lignes Partition par colonnes

Application au produit matriciel

Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ des matrices.

Matrices triangulaires et diagonales par blocs, inverses par blocs

Définition 71 (triangulaire supérieure, inférieure et diagonale par blocs).
Une matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est dite

1. triangulaire supérieure par blocs si $A_{ij} = 0, \forall j < i :$

2. triangulaire inférieure par blocs si $A_{ij} = 0, \forall j > i :$

3. diagonale par blocs

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure par blocs avec
 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$. Supposons A inversible d'inverse $A^{-1} :$

Partitionnons A^{-1} de la même façon : $A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$. Alors

Théorème 75. *Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure par blocs. Alors si A_{11} et A_{22} sont inversibles, A est inversible et*

Exemples

7.3 Décomposition spectrale

Si A est une matrice symétrique, alors on peut l'écrire sous la forme $A = PDP^T$ pour P orthogonale et D diagonale. Autrement dit, on a

Ainsi, le développement "colonne-ligne" du produit matriciel permet d'écrire la décomposition suivante :

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i \vec{u}_i^T = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T.$$

Cette écriture est appelée *décomposition spectrale* de A car c'est une décomposition en éléments dépendant du *spectre* de A , c'est-à-dire de ses valeurs propres.

Remarque

Chaque terme $\lambda_i \vec{u}_i \vec{u}_i^T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est de rang égal à 1. En effet :

Exemple